LOCALLY SMALL RIEMANN SUMS FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA RUANG EUCLIDE $\mathbb{R}^n$

Solikhin
Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, S.H. Semarang 50275 , soli_erf@yahoo.com

ABSTRAK

In this paper we study Henstock-Dunford integral on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. We discuss some properties of the integrable. We shall define locally small Riemann sums (LSRS) and show that it is necessary and sufficient condition for function to be Henstock-Dunford integral on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$.

Kata Kunci : Henstock-Dunford integral, Locally small Riemann sums

Pendahuluan

Integral Henstock merupakan generalisasi dari integral Riemann, yang didefinisikan berdasarkan partisi Perron δ-fine. Integral ini memuat integral Riemann dan integral Lebesque (ekuivalen integral McShane) [2], [7]. Integral Henstock telah mengalami perkembangan baik dari segi teori maupun aplikasinya [1], [4], [6]. Dari kajian tentang integral Henstock banyak sifat-sifat yang telah diungkap baik dalam ruang real $\mathbb{R}$ [2], [7] maupun ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ [5].

Berbeda dengan integral Dunford. Dunford mendefinisikan integralnya pada fungsi terukur lemah pada ruang real $\mathbb{R}$ [9]. Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya. Fungsi terukur lemah $f:[a,b]\to X$ dikatakan terintegral Dunford pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x^*\in X^*$ fungsi bernilai real $x^*f:[a,b]\to\mathbb{R}$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan untuk setiap $A\subset[a,b]$ himpunan terukur terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)}\in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}\left(x^*\right)=(H)\int_A x^*f=(H)\int_a^b x^*f\chi_A .$$

Integral Dunford kemudian diperluas ke dalam integral tipe Riemann, yaitu untuk setiap $x^*\in X^*$ fungsi bernilai real $x^*f:[a,b]\to\mathbb{R}$ terintegral Henstock. Integral ini dinamakan integral Henstock-Dunford [3]. Integral jenis ini juga telah digeneralisasi ke dalam ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ [8]. Pembahasannya meliputi sifat-sifat sederhana dan beberapa teorema kekonvergenan [8]. Hasil penelitian ini menjadi perhatian penulis untuk mengkaji sifat perluasan Harnack dan perluasan Cauchy pada penelitian sebelumnya.

Berdasarkan hasil kajian integral Henstock-Dunford mengenai sifat-sifat sederhana dan fungsi primitifnya [8], penulis akan mengkaji sifat-sifat lebih lanjut dari integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$. Sifat-sifat ini digeneralisasi dari integral Henstock pada ruang real $\mathbb{R}$, yaitu sifat Locally small Riemann sums fungsi terintegral Henstock. Diperoleh bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock adalah memenuhi sifat locally small Riemann sumsnya [7].

Metode Penelitian

Langkah awal dalam penelitian ini adalah mengkajii teori integral, integral Henstock bernilai real dan sifat locally small Riemann sumsnya, kemudian mengkaji integral Henstock-Dunford pada ruang real $\mathbb{R}$ dan integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$. Langkah selanjutnya adalah menggeneralisasi sifat locally small Riemann sums dari integral Henstock ke dalam integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$. Kemudian dari hasil analisa tersebut disimpulkan dalam bentuk teorema.

Hasil dan Pembahasan

Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide $\mathbb{R}^n$

Pada tulisan ini, dibahas definisi integral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$, sifat-sifat sederhana, dan fungsi primitifnya mengacu pada [8].

Definisi 3.1. [8] *Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume-α pada $\mathbb{R}^n$ dan sel $E \subset \mathbb{R}^n$. Fungsi $f : E \to X$ dikatakan terintegral Henstock -Dunford pada E jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A,\alpha)} \in X^{**}$ sehingga*

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)}\left(x^*\right) = \left(H\right)\int_A x^* f \, .$$

Vektor $x^{**}_{(f,A,\alpha)} \in X^{**}$ di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford fungsi f pada A dan ditulis

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)} = \left(HD\right)\int_A f \, .$$

Jika f terintegral Henstock-Dunford pada E, ditulis $f \in HD\left(E,\alpha\right)$.

Teorema 3.2. [8] *Jika $f \in HD(E,\alpha)$ maka $f \in HD(A,\alpha)$ untuk setiap sel bagian $A \subset E$.*

Bukti :

Jelas berdasarkan definisi. ■

Teroema 3.3. (Kriteria Cauchy) *Fungsi* $f \in HD(E,\alpha)$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* E *sehingga jika* $A \subset E$ *sel dan* $\mathcal{D} = \{(D,\bar{x})\}$ *dan* $\mathcal{P} = \{(P,\bar{y})\}$ *masing-masing partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - \mathcal{P}\sum x^* f(\bar{y})\alpha(P)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Bukti:

(Syarat Perlu) Diketahui $f \in HD(E,\alpha)$. Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada sel E dan untuk setiap sel $A \subset E$ terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)}\left(x^*\right) = (H)\int_A x^* f\ .$$

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada sel E sehingga untuk setiap sel $A \subset E$ dan $\mathcal{D} = \{(D,\bar{x})\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P,\bar{y})\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) - \mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left|x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) - \mathcal{P}\sum x^* f(\bar{y})\alpha(P)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Dengan demikian diperoleh

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - \mathcal{P}\sum x^* f(\bar{y})\alpha(P)\right|$$

$$\leq \left|\mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*)\right| + \left|x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) - \mathcal{P}\sum x^* f(\bar{y})\alpha(P)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

(Syarat cukup) Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan $x^* \in X^*$ maka terdapat fungsi positif δ pada sel E sehingga untuk setiap sel $A \subset E$ dan $\mathcal{D} = \{(D,\bar{x})\}$ dan $\mathcal{P} = \{(P,\bar{y})\}$ masing-masing partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - \mathcal{P}\sum x^* f(\bar{y})\alpha(P)\right| < \varepsilon\ .$$

Diambil $\varepsilon = 1$ terdapat fungsi positif δ_1 pada E dengan sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$ terdapat fungsi positif δ_2 pada E dengan $\delta_2 \leq \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Diambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$ terdapat fungsi positif δ_n pada E dengan

$\delta_n \le \delta_{n-1} \le ... \le \delta_2 \le \delta_1$ dan memenuhi sifat di atas.

Untuk $\forall\, n \in \mathbb{N}$ dan $x^* \in X^*$ didefinisikan

$$S_n = \mathcal{D}_n \sum x^* f(\bar{x})\alpha(D),$$

dengan jumlahan diambil atas partisi Perron $\delta_n -$fine $\mathcal{D}_n = \{(D, \bar{x})\}$ pada A.

Diambil sebarang $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m \ge n$, maka untuk setiap partisi Perron $\delta_m -$fine pada A merupakan partisi Perron $\delta_n -$fine pada A.

Akibatnya untuk setiap partisi Perron $\delta_m -$fine $\mathcal{D}_m = \{(D, \bar{x})\}$ pada A dan sebarang partisi Perron $\delta_n -$fine $\mathcal{D}_n = \{(D, \bar{x})\}$ pada A berlaku

$$|S_m - S_n| =$$

$$\left|\mathcal{D}_m \sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - \mathcal{D}_n \sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| < \frac{1}{n}$$

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli n_0 sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Selanjutnya jika $m, n \ge n_0$ maka diperoleh

$$|S_m - S_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hal ini berarti $\{S_n\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset E$ di atas terdapat bilangan $x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) = S \in \mathbb{R}$ sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Dengan demikian untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli n_0^* dan jika $n \ge n_0^*$ berlaku

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diambil

$$\delta(\bar{x}) = \min\left\{\delta_{n_0}(\bar{x}), \delta_{n_0^*}(\bar{x}) : \bar{x} \in E\right\}$$

Diperoleh δ fungsi positif pada E.

Selanjutnya untuk setiap $\mathcal{P} = \{(P, \bar{x})\}$ partisi Perron $\delta -$fine pada A berlaku

$$\left|\mathcal{P}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(P) - S\right|$$

$$\le \left|\mathcal{P}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(P) - S_{n_0^*}\right| + \left|S_{n_0^*} - S\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hal ini berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock pada E dan terdapat vektor $x^{**}_{(f,A,\alpha)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A,\alpha)}(x^*) = S = (H)\int_A x^* f\ .$$

Dengan kata lain, $f \in HD(E,\alpha)$.

■

Definisi 3.3. [8] *Diberikan* $f \in HD(E,\alpha)$ *dan* $\mathcal{I}(E)$ *koleksi semua sel bagian di dalam* E. *Fungsi* $F : \mathcal{I}(E) \to X$ *dengan rumus*

$$F(A) = x^{**}_{(f,A,\alpha)} = (HD)\int_A f$$

dan $F(\emptyset) = 0$, *untuk setiap* $A \in \mathcal{I}(E)$ *disebut fungsi primitif-HD fungsi* f .

Berdasarkan Definisi 3.3 maka fungsi F merupakan fungsi aditif.

Akibat 3.5. [8] *Jika* $f \in HD(E,\alpha)$ *dengan* F *sebagai primitif-HDnya dan* $E_1, E_2, ..., E_p$ *sel-sel di dalam* E *yang tidak saling tumpang-tindih dan* $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$ *maka*

$$F(E) = \sum_{i=1}^{p} F(E_i) = \sum_{i=1}^{p} x^{**}_{(f,E_i,\alpha)}\ .$$

Bukti :

Karena $f \in HD(E,\alpha)$ dengan F sebagai primitif-HDnya, $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$ dengan $E_i^0 \cap E_j^0 = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$ maka diperoleh

$$F(E) = F\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right)$$

$$= x^{**}_{\left(f,\bigcup_{i=1}^{p} E_i,\alpha\right)}$$

$$= x^{**}_{(f,E_1,\alpha)} + x^{**}_{(f,E_2,\alpha)} + ... + x^{**}_{(f,E_p,\alpha)}$$

$$= F(E_1) + F(E_2) + ... + F(E_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} F(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x^{**}_{(f,E_i,\alpha)}\ .$$ ■

Selanjutnya berdasarkan Definisi 3.1 maka integral Henstock-Dunford pada E dapat dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 3.6. [8] *Fungsi* $f \in HD(E,\alpha)$ *jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif* $F : \mathcal{I}(E) \to X$ *sehingga untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *dan* $x^* \in X^*$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* E *sehingga jika* $A \subset E$ *sel dan* $\mathcal{D} = \{(D,\bar{x})\}$ *partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^*\left(f(\bar{x})\alpha(D) - F(D)\right)\right| < \varepsilon$$

atau

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon\ .$$

■

Teorema 3.7. (Lemma Henstock) *Fungsi* $f \in HD(E,\alpha)$ *dengan fungsi primitif* F, yaitu *untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *dan* $x^* \in X^*$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* E *sehingga jika* $A \subset E$ *sel dan* $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ *partisi Perron* δ*-fine pada* A *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^*\left(f(\bar{x})\alpha(D) - F(D)\right)\right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ dari $\mathcal{D}\sum$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum_1 x^* f(\bar{x})\alpha(D) - x^*F(D)\right| < \varepsilon .$$

■

Locally Small Riemann Sums

Berikut ini akan ditunjukkan syarat perlu dan cukup suatu fungsi terintegral Henstock-Dunford pada sel E, yaitu memenuhi sifat locally small Riemann sums terhadap α pada E.

Definisi 3.8. [7] *Diberikan* X *ruang Banach dan* X^* *ruang dualnya, volume* α*,sel* $E \subset \mathbb{R}^n$, *dan* $f : E \to X$ *fungsi terukur-*α. *Fungsi* f *dikatakan mempunyai sifat Locally Small Riemann Sums (LSRS) terhadap* α *pada sel* E, *ditulis* $f \in LSRS(E,\alpha)$, *jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, *dan* $A \subset E$ *sel terdapat fungsi positif* δ *pada* E *sehingga untuk setiap* $\bar{y} \in E$ *berlaku*

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ*-fine* $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ *pada sel* $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ *dan* $\bar{y} \in C$.

Teorema 3.9. [7] *Jika fungsi terukur-*α $f \in HD(E,\alpha)$ *maka* $f \in LSRS(E,\alpha)$.

Bukti:

Diketahui fungsi terukur-α $f \in HD(E,\alpha)$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada A berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^*\left(f(\bar{x})\alpha(D) - F(A)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dengan F primitif-HD pada E.

Untuk setiap $\bar{y} \in E$, dipilih sel $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ sehingga berlaku

$$\left|x^*F(C)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Menurut Lemma Henstock, untuk setiap $\bar{y} \in E$ dan partisi Perron δ-fine pada $C \subset B(\bar{y}, \delta(\bar{y}))$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| \le \left|\mathcal{D}\sum x^*\left(f(\bar{x})\alpha(D) - F(C)\right)\right| \\ + \left|x^*F(C)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \quad \blacksquare$$

Teorema 3.10. [7] *Jika fungsi terukur-*α $f \in LSRS(E,\alpha)$ *maka untuk setiap* $x^* \in X^*$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* E *sehingga*

$$\left\{ \mathcal{D}\sum x^* f(x)\alpha(D) : \mathcal{D} \right\}$$

dengan

$\mathcal{D}$ partisi Perron $\delta -$ *fine* pada E

adalah terbatas pada E.

Bukti:

Fungsi $f \in LSRS(E,\alpha)$ berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $A \subset E$ sel maka terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap $\overline{y} \in E$ berlaku

$$\left| \mathcal{D}\sum x^* f(\overline{x})\alpha(D) \right| < 1$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D,\overline{x})\}$ pada sel $C \subset B(\overline{y}, \delta(\overline{y}))$ dan $\overline{y} \in C$.

Dibentuk $\mathcal{F} = \{B(\overline{x}, \delta_*(\overline{x})) : \overline{x} \in E\}$. Diperoleh bahwa $\mathcal{F}$ merupakan liput terbuka bagian berhingga untuk E.

Karena E kompak maka terdapat liput bagian berhingga $\mathcal{G}$ untuk E, katakan $\{B(\overline{x}_i, \delta_*(\overline{x}_i)) : i = 1,2,...,p\} \subset \mathcal{F}$.

Untuk setiap $\overline{x} \in E$ terdapat $k, 1 \le k \le p$ dengan $\overline{x} \in B(\overline{x}_k, \delta_*(\overline{x}_k))$.

Dibentuk fungsi positif δ pada E dengan rumus

$$\delta(\overline{x}) = \frac{1}{2}\min\left\{ d\left(\overline{x}, \partial\left(B(\overline{x}_k, \delta_*(\overline{x}_k))\right)\right) \right\}.$$

$\overline{x}$ titik interior $B(\overline{x}_k, \delta_*(\overline{x}_k)), 1 \le k \le p$.

Akibatnya untuk setiap $\overline{x} \in E$ terdapat suatu $j, 1 \le j \le p$ dengan sifat $B(\overline{y}, \delta(\overline{y})) \subseteq B(\overline{x}_j, \delta_*(\overline{y}_j))$ dan

$$\left| \mathcal{D}_j \sum x^* f(\overline{x})\alpha(D) \right| < 1$$

untuk setiap partisi Perron δ_*-fine $\mathcal{D}_j$ pada sel $C \subset B(\overline{y}, \delta_*(\overline{y}))$ dan $\overline{x}_j \in C$.

Untuk setiap partisi $\mathcal{D} = \bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{D}_j$ maka

$$\left| \mathcal{D}\sum x^* f(\overline{x})\alpha(D) \right| \le \sum_{j=1}^{p} \left| \mathcal{D}_j \sum x^* f(\overline{x})\alpha(D) \right|$$

$$< p . \quad \blacksquare$$

Teorema 3.11. [7] *Jika fungsi terukur-*α $f \in LSRS(E,\alpha)$ *maka* $f \in HD(C,\alpha)$ *untuk setiap sel* $C \subset E^0$.

Bukti:

Fungsi terukur-α $f \in LSRS(E,\alpha)$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan $A \subset E$ sel terdapat fungsi positif δ pada E sehingga berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(\overline{x})\alpha(D)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \overline{x})\}$ pada sel $D \subset B(\overline{y}, \delta(\overline{y}))$ dan $\overline{y} \in D$.

(i) Jika terdapat $\overline{y} \in E$ dengan $C \subset B(\overline{y}, \delta(\overline{y}))$ diperoleh :

Jika $\overline{y} \in C$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ dan dua partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}_1 = \{(D, \overline{x})\}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(D, \overline{x})\}$ pada E berlaku

$$\left|\mathcal{D}_1\sum x^* f(\overline{x})\alpha(D) - \mathcal{D}_2\sum x^* f(\overline{x})\alpha(D)\right| < \varepsilon$$

Menurut kriteria Cauchy, $f \in HD(C, \alpha)$.

Jika $\overline{y} \notin C$ maka ada sel $G \subset B(\overline{y}, \delta(\overline{y}))$, sehingga $\overline{y} \in G$ dan $C \subset G$. Akibatnya untuk setiap $x^* \in X^*$ dan dua partisi Perron δ-fine $\mathcal{D}_1 = \{(D, \overline{x})\}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(D, \overline{x})\}$ pada G berlaku

$$\left|\mathcal{D}_1\sum x^* f(\overline{x})\alpha(D) - \mathcal{D}_2\sum x^* f(\overline{x})\alpha(D)\right| < \varepsilon$$

Menurut kriteria Cauchy, $f \in HD(G, \alpha)$. Karena $C \subset G$ dan $f \in HD(G, \alpha)$ maka $f \in HD(C, \alpha)$.

(ii) Jika $C \not\subset B(\overline{y}, \delta(\overline{y}))$ maka ada fungsi positif δ pada E yang berakibat adanya partisi perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(C_i, \overline{y}_i) : i = 1, 2, ..., k\}$ pada sel C. Jadi $f \in HD(C_i, \alpha), \forall i = 1, 2, ..., k$. Jadi $f \in HD(C, \alpha)$. ■

Akibat 3.12. [7] *Jika fungsi terukur-*α $f \in LSRS(E, \alpha)$ *maka* $f \in HD(C, \alpha)$ *untuk setiap himpunan sederhana* $C \subset E^0$.

Teorema 3.13. [7] *Jika fungsi terukur-*α $f \in LSRS(E, \alpha)$ *maka* $f \in HD(E, \alpha)$.

Bukti:

Diketahui fungsi terukur-α $f \in LSRS(E, \alpha)$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$, dan $A \subset E$ sel terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap $\overline{y} \in E$ berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(\overline{x})\alpha(D)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ-fine $\mathcal{D} = \{(D, \overline{x})\}$ pada sel $C \subset B(\overline{y}, \delta(\overline{y}))$ dan $\overline{y} \in C$.

Menurut Akibat di atas, $f \in HD(C, \alpha)$ untuk setiap himpunan sederhana $C \subset E^0$.

Barisan himpunan $\{E_i\}, E_i \cap E_j = \varnothing, \quad \forall\, i \neq j$ bersifat $E^0 = \bigcup E_i$.

Dengan demikian untuk bilangan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan positif n_0 dengan sifat

$$\alpha\left(\left|\overline{E - \bigcup_{i \geq n_0} E_i}\right|\right) < \varepsilon .$$

Untuk setiap i terdapat fungsi positif δ_i dengan sifat bahwa untuk setiap partisi Perron δ_i-fine pada E berlaku

$$\left|\mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) - (H)\int_{E_i} x^* f\right| < \varepsilon ,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Didefinisikan fungsi positif δ dengan rumus

$$\delta(\bar{x}) = \begin{cases} \min\left\{\delta^*(\bar{x}), \delta_i(\bar{x}), \frac{1}{2} d\left(\bar{x}, \partial E\right)\right\}, \bar{x} \in \bigcup_{i < n_0} E_i \\ \min\left\{\delta^*(\bar{x}), \delta_i(\bar{x})\right\}, \bar{x} \in \bigcup_{i \geq n_0} E_i \end{cases}$$

Untuk fungsi positif δ pada E dan bilangan positif n_0 bersifat untuk setiap $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ dengan $C_j = E_i \cap D$ untuk suatu $i \geq n_0$ dan suatu D dengan $\{(D, \bar{x})\}$ δ-fine dan $\bar{x} \in E^0$ berlaku

(i) Jika $C_j = E_i$, untuk setiap $i \geq n_0$.

Karena $f \in HD(E_i, \alpha)$ dan $f \in HD(C_j, \alpha)$ maka $f \in HD\left(\bigcup_{j=1}^{k} C_j, \alpha\right)$.

Dipilih fungsi positif δ_* dengan $\delta_*(\bar{x}) = \min\{\delta_j(\bar{x}) : j = 1, 2, ..., k\}$ maka untuk setiap partisi Perron δ_*-fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada $\bigcup_{j=1}^{k} C_j$ berlaku

$$\left|(H)\int_{\bigcup_{j=1}^{k} C_j} x^* f - \mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| < \varepsilon ,$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Dengan demikian diperoleh

$$\left|\mathcal{C}\sum (H)\int_C x^* f\right| \leq$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mathcal{D}\left|\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right| +$$

$$\left|(H)\int_{\bigcup_{j=1}^{k} C_j} x^* f - \mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right|$$

$$< k\varepsilon + \varepsilon .$$

Menurut sifat Cauchy, $f \in HD(E, \alpha)$.

(ii) Jika $C_j = E_i \cap D$, untuk $i \geq n_0$ dan suatu D dengan $\{(D, \bar{x})\}$ δ-fine dan $\bar{x} \in E^0$ maka $C_j \subset B(\bar{x}, \delta(\bar{x}))$.

Menurut Teorema 3.11. maka $f \in HD\left(C_j, \alpha\right)$. Akibatnya

$$f \in HD\left(\bigcup_{j=1}^{k} C_j, \alpha\right).$$

Dipilih fungsi positif δ_1 dengan sifat $\delta_1(\bar{x}) \le \delta(\bar{x})$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ_*-fine $\mathcal{D} = \left\{\left(D, \bar{x}\right)\right\}$ pada $\bigcup_{j=1}^{k} C_j$ berlaku

$$\left| \left(H\right) \int_{\bigcup_{j=1}^{k} C_j} x^* f - \mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) \right| < \varepsilon$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Dengan demikian diperoleh

$$\left| \mathcal{C}\sum\left(H\right)\int_C x^* f \right| \le$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mathcal{D}\left|\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D)\right|$$

$$+\left| \left(H\right) \int_{\bigcup_{j=1}^{k} C_j} x^* f - \mathcal{D}\sum x^* f(\bar{x})\alpha(D) \right|$$

$$< k\varepsilon + \varepsilon .$$

Menurut sifat Cauchy, $f \in HD\left(E, \alpha\right)$. ■

Akibat 3.14. [7] *Fungsi terukur-*α $f \in LSRS\left(E, \alpha\right)$ *jika dan hanya jika* $f \in HD\left(E, \alpha\right)$. ■

Simpulan

Berdasarkan pembahasan di muka diperoleh kesimpulan bahwa syarat perlu dan cukup suatu fungsi terukur-α terintegral Henstock-Dunford pada sel $E \subset \mathbb{R}^n$ adalah fungsi tersebut mempunyai sifat locally small Riemann sums terhadap α pada E.

Untuk penelitian selanjutnya dapat dikaji mengenai sifat globally, functionally, dan essentially small Riemann sums fungsi terintegral Henstock-Dunford pada ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ beserta aplikasinya.

Daftar Pustaka

Boccuto, A., Skvortsov, A.V., 2004, *Henstock-Kurzweil Type Integration of Riesz-Space-Valued Functions and Applications to Walsh Series*, Real Analysis Echange, 29(1): 419-439.

Gordon, R.A., 1994, *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, USA: Mathematical Society.

Guoju, Ye., Tianqing, An., 2001, *On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals*, IJMMS, 25(7): 467-478.

Heikkila, S., 2011, *Monotone Convergence Theorems for Henstock-Kurzweil Integrable Functions and Applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 377(1): 286-295.

Indrati, Ch. R., 2002, *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclide Berdimensi-n*, *Disertasi*, Ypgyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Indrati, Ch.R., Surodjo, Budi., 2000, *Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor*, Yogyakarta: Lembaga Penelitian UGM.

Lee P.Y., 1989, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Singapore: World Scientific.

Saifullah, 2003, *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclide* $\mathbb{R}^n$, Tesis, Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Schwabik, S., Guoju, Ye., 2004, *Topics in Banach Space Integration,* Manuscrip in Preparation.